المحاضرة العشرون

2015/12/16

العلاقة الثلاثية: تمثل منطلق وهو مجموعة ومستقر وهو أيضاً مجموعة وقد تساوي مجموعة المنطلق وأخيراً قاعدة ربط (بيان) وهي التي تربط المنطلق مع المستقر.

وقاعدة تربط تعتبر حرة أي: يمكن أي عنصر من المنطلق بأي عنصر من المستقر أو يمكن أن تربط عنصر من المنطلق بعدد من عناصر المستقر أو يمكن أن تربط عنصر من المستقربعدد من عناصر المنطلق.

التابع: هو علاقة تربط كل عنصر من المنطلق بعنصر أو أكثر من المستقر.

- إذا كان التابع يربط كل عنصر من المنطلق بعنصر واحد من المستقر فإننا نسميه تابع وحيد القيمة (وحيد التعيين).
- أما إذا كان التابع يربط كل عنصر من المنطلق بعنصرين على الأقل من المستقر فإننا نسميه تابع متعدد القيم.

✓ اصطلاحاً: عندما نقول تابع نقصد به تابع وحيد التعين.

التابع الحقيقي: هو تابع مستقره مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها.

التابع الحقيقي بمتحول حقيقي: هو تابع مستقره مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها ومنطلقه أيضاً مجموعة الأعداد الحقيقية أو جزء منها.

☺ معلومة: إذا وصفنا المتحول بأي صفة فإن مجموعة المنطلق هي التي تحمل الصفة، بينما لو وصفنا التابع بأي صفة فإن مجموعة المستقر هي التي تحمل تلك الصفة.

التابع العقدي: هو تابع مستقره مجموعة الأعدادد العقدية أوو مجموعة جزئية منها.

التابع العقدي بمتحول عقدي: هو تابع منطلقه مجموعة الأعداد العقدية أو مجموعة جزئية منها ومستقره مجموعة الأعداد العقدية أو مجموعة جزئية منها.

التابع العقدي بمتحول حقيقي: هو تابع منطلقه مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها ومستقره مجموعة الأعداد العقدية أو مجموعة جزئية منها.

يقرن كل t بِ $f(t)$ عدداً عقدياً يمكن أن يرمز له بِ z أو w أي:

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longrightarrow z = f(t)$$

لكون $z = f(t)$ تابع عقدي فهو يكتب بالشكل الجبري أي

$$\forall\, t \in A\,, f(t) = \underbrace{u(t)}_{Re\, f(t)} + i \cdot \overbrace{v(t)}^{Im\, f(t)}$$
$$t \longrightarrow u(t) = Re\, f(t)$$
$$t \longrightarrow v(t) = Im\, f(t)$$

كل تابع عقدي بمتحول حقيقي يقابله تابعين حقيقين بمتحولين حقيقين.

نسمي التابع الأول الجزء الحقيقي للتابع ونرمز له بِ $Re\, f$.

ونسمي التابع الثاني الجزء التخيلي للتابع ونرمز له بِ $Im\, f$.

مجموعة تعرف التابع f هي تقاطع مجموعتي التعريف v وَ u (أي كل من الجزء الحقيقي والتخيلي للتابع f).

✓ اصطلاحاً: في حال لم نذكر مجموعة تعرف التابع صراحةً فإن المنطلق هو مجموعة تعريفه.

مثال عن التوابع العقدية بمتحول حقيقي هي المتتاليات العقدية.

❁ إن مجموعة تعريف تابع حقيقي: هيأوسع مجموعة من الأعداد الحقيقية أو أوسع مجموعة جزئية محتواة في $\mathbb{R}$ تكون لأجلها قاعدة ربط التابع معرفة (أي قابلة للحساب وقيمته في المستقر لها معنى).

- **مثال:** ماهي مجموعة تعريف (منطلقه) التابع التالي: $f(t)=\underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{Re\,f}+i\cdot\underbrace{\frac{1}{1-t^2}}_{Im\,f}$

هو تابع عقدي بمتحول حقيقي:

إن $Re\,f$ معرف على $\mathbb{R}$ وإن $Im\,f$ معرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\,,1\}$.

ومنه f معرفة على $\mathbb{R}\backslash\{-1\,,+1\}$ (وهي تقاطع مجموعتي التعريف لِ $Im\,f$ وَ $Re\,f$.

❁ تعاريف النهاية والاستمرار وقابلية الاشتقاق لتابع عقدي بمتحول حقيقي شبيه تماماً لتعاريف تابع حقيقي بمتحول حقيقي إلا أن المسافة أو النظيم المعرفة على $\mathbb{C}$ تختلف عن التي هي معرفة في $\mathbb{R}$.

- **نهاية تابع عقدي بمتحول حقيقي:**

يكون لِ $f(t)=u(t)+i\cdot v(t)$ نهاية مساوية للعدد العقدي a عند النقطة t_0 إذا كان لكل من u وَ v نهاية عند t_0

وإذا كانت $\lim\limits_{t\to t_0}u=Re\,a$ وَ $\lim\limits_{t\to t_0}v=Im\,a$

أو اختصاراً: $\lim\limits_{t\to t_0}f(t)=\lim\limits_{t\to t_0}u(t)+i\cdot\lim\limits_{t\to t_0}v(t)$

✓ إذا كانت إحدى النهايتين غير موجودة أي $\lim\limits_{t\to t_0}u$ أوَ $\lim\limits_{t\to t_0}v$ أحدها غير موجودة فإن نهاية $f(t)$ غير موجودة.

✓ وإذا كانت نهاية $u(t)$ موجودة ونهاية $v(t)$ موجودة فإن نهاية $f(t)$ موجودة وتكون نهاية f هي نهاية الجزء الحقيقي لها + i بِ نهاية الجزء التخيلي لها.

- **استمرار تابع عقدي بمتحول حقيقي:**

يكون $f(t)=u(t)+i\cdot v(t)$ مستمراً عند t_0 إذا كان كل من v وَ u مستمران عند t_0.

- **قابلية اشتقاق تابع عقدي بمتحول حقيقي:**

يكون $f(t)=u(t)+i\cdot v(t)$ قابل للاشتقاق عند t_0 إذا كان كل من v وَ u قابلان للاشتقاق عند t_0.

وإذا كان ذلك محققاً فإن: $f'(t_0)=u'(t_0)+i\cdot v(t_0)$.

- **المنحني العقدي:**

تعريف: المنحني في $\mathbb{C}$ هو تابع عقدي بمتحول حقيقي معرف ومستمر على مجال مغلق.

مثال: $\gamma:[0\,,2\,\pi]\longrightarrow\mathbb{C}$

$\gamma(\mathrm{t})=\mathrm{cis\ t}=\cos t+i\cdot\sin t$

- **تمثيل تابع عقدي بمتحول حقيقي:**

سوف نمثل التابع في التمرين السابق:

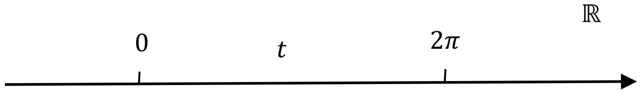
أن التطبيق γ مستمر على المجال المغلق $[0\,,2\pi]$

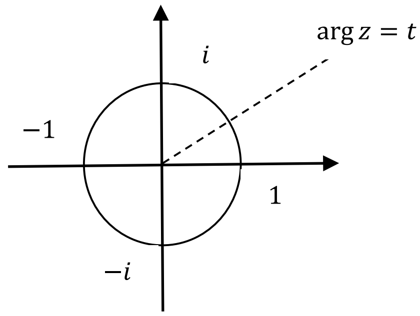
لإن: يكون تابع عقدي قيمه $\mathbb{C}$ بمتحول حقيقي مستمر $\Leftrightarrow$ كان جزءاه الحقيقي والتخيلي مستمرين.

وهنا لدينا إقران كل t بِ $\cos t$ وهو تابع مستمر بمتحول حقيقي وذلك على $\mathbb{R}$ بأكملها و أيضاً $\sin t$ وهو تابع مستمر على كامل $\mathbb{R}$ ومنه γ تابع مستمر على $\mathbb{R}$ ومنه على أي مجال جزئي من $\mathbb{R}$ ومنه التطبيق γ مستمر على المجال

$[0\ ,2\pi]$

لدينا من شكل الجبري لِ $\gamma(\mathrm{t})$ نرى أنه عدد عقدي طويلته 1 وزاويته t وعندما تمسح t المجال $[0\ ,2\pi]$ فإن $\gamma(\mathrm{t})$ ستمسح دائرة الواحدة مرة واحدة وباتجاه الموجب وعكس عقارب الساعة مع المرور على النهاية والبداية مرتين.





- ## التابع العقدي بمتحول عقدي (التابع العقدي):

$$f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad : z \to w = f(z)$$

يقرن كل عدد عقدي بعدد عقدي أخر.

إن z عدد عقدي فهو يكتب بالشكل الجبري.

إذا كان $z = x + i \cdot y$ وبما أن $f(\mathbb{C}) \in \mathbb{C}$ فإن:

$$f(z) = f(x + i \cdot y) = u(x\ ,y) + i \cdot v(x\ ,y)$$

نسمي u الجزء الحقيقي لِ f ونرمز له بِ $Re\ f$.

نسمي v الجزء التخيلي لِ f ونرمز له بِ $Im\ f$.

- ## أمثلة:

ليكن التابع الذي قاعدة ربطه $f(z) = \frac{1}{z}$ ماهي مجموعة تعريفه ومن ثم أوجد الجزء الحقيقي والتخيلي له؟

الحل: مجموعة تعريفه: لدينا $f(z)$ تابع عقدي بمتحول عقدي معرف على $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

إيجاد الجزء الحقيقي والتخيلي للتابع:

نبدل بقاعدة الربط كل z بِ $x + i \cdot y$ فيصبح كالآتي:

$$f(z) = f(x + i \cdot y) = \overbrace{\frac{1}{x + i \cdot y}}^{\text{نكتبه بالشكل الجبري}} \underbrace{=}_{\text{نضرب و نقسم على مرافق المقام}} \frac{x - i \cdot y}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \quad , \quad Re\ f = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ وَ } Im\ f = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

۞ إن كل تابع عقدي يقابله تابعين حقيقين كل منهما تابع لمتحولين حقيقين وبالتالي فإن u وَ v كلاهما معرفين على جزء من $\mathbb{R}^2$ أو على $\mathbb{R}^2$ بكاملها.

وإن مجموعة تعريف تابع عقدي بمتحول عقدي هي تقاطع لمجموعتي تعريف كل من جزئيه الحقيقي والتخيلي.

✓ بالعودة لتمرين السابق:

$$(Re\ f)(x\ ,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ وَ } (Im\ f)(x\ ,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

مجموعة تعريف الجزء الحقيقي لِـ f هي $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ ومجموعة تعريف الجزء التخيلي لِـ f هي $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ ومنه مجموعة تعريف f هي تقاطع المجموعتين أي $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ ولكون f تابع عقدي بمتحول عقدي فإننا نقابل مجموعة تعريف التي نتجت في المجموعة $\mathbb{C}$ فينتج إنها تقابل $\mathbb{C}^*$.

❀ ملاحظة: إذا كان العدد العقدي بالشكل المثلثي أي: $z = r \cdot cis\ \theta$ فإن:

$$f(z) = \underbrace{u(r\,,\theta)}_{\text{حقيقي}} + i \cdot \underbrace{v(r\,,\theta)}_{\text{تخيلي}}$$

مثال: أوجد جزء الحقيقي والتخيلي لتابع التالي مرة بالأحداثيات الديكارتية ومرة بالقطبية:

$$f(z) = z^2 - 2z - i$$

$$f(z) = f(x + i \cdot y) = (x + i \cdot y)^2 - 2(x + i \cdot y) - i$$

$$= \underbrace{x^2 - y^2 - 2x}_{u(x\,,y)} + i \cdot \underbrace{(2xy - 2y - 1)}_{v(\,x\,,y)}$$

بالأحاثيات القطبية:

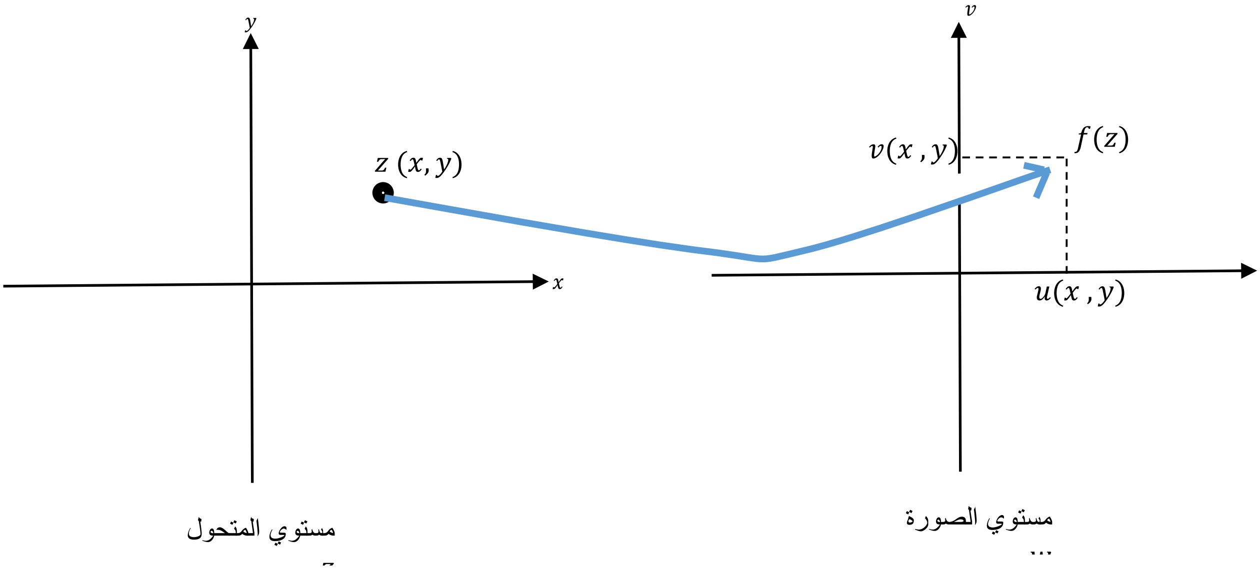
$$f(z) = f(r\ cis\ \theta) = \underbrace{(r\ cis\ \theta)^2}_{\text{حسب دوموافير}} - 2(r\ cis\ \theta) - i$$

$$= r^2 cis\ 2\theta - 2r\ cis\ \theta - i$$

$$= \underbrace{(r^2 \cos 2\theta - 2\,r \cos\theta)}_{u_1(r\,,\theta)} + i \cdot \underbrace{(r^2 \sin 2\theta - 2r \sin\theta - 1)}_{v_1(r\,,\theta)}$$

✓ رمزنا للأحداثيات ديكارتية بِـ v وَ u وللقطبية بِـ v_1 وَ u_1 ولم نرمز لهما نفس الرمز لإن قواعد الربط مختلفة بين الحالتين.

- **تمثيل تابع عقدي بمتحول عقدي:**



المستوي العقدي z سيصور بعدد عقدي $w = f(z)$

عندما نجعل z يمسح كامل المنطلق فأننا نحصل على صورته في المستقر.

مثال: مثّل صورة القرص $D(0\,,2)$ وفق التابع: $f(z) = 3 + i \cdot x^2$

الحل: إن $u(x\,,y) = 3$ وَ $v(x\,,y) = x^2$

من العلاقة $u = 3$ نلاحظ أن الصورة ستقع في مستوي الصورة على المستقيم الذي معادلته $u = 3$.

لنأخذ قطر القرص $D(0,2)$ أي القطعة المستقيمة الواصلة بين الطرفين 2 و-2 ما عدا الطرفين أي $]-2\ 2[$ الواقعة على المحور ox.

إذا كانت z منتمية لهذه القطعة فإن الـ x ستكون محصورة بين -2 وَ 2 أي $-2 < x < 2$

وعندما الـ $x \in]-2\,,2[$ فإن $v = x^2$ ستمسح المجال $[0\,,4[$

وبالتالي فإن صورة القطعة المستقيمة $]AB[\,=\,]-2\ 2[$ وفق التابع f ستكون القطعة المستقيمة التي طرفاها 3 وَ 4 دون الطرف العلوي أي $[3\ 4[$

صورة أي قطعة مستقيمة من الشكل $-2 < y_0 < 2\ ;\ y = y_0$ وَ $-2 < x_0 < 2\ ;\ -x_0 < x < x_0$

ستكون محمولة على المستقيم الذي بدايته $u = 3$ ونهايته x_0^2.

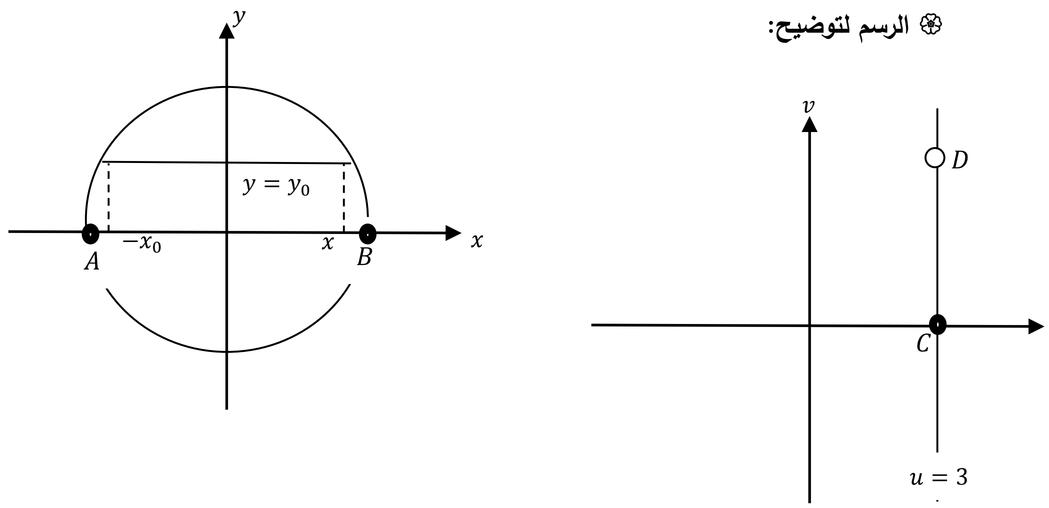
ذلك لإن: عندما $\begin{matrix}-2<x_0<2\\-2<y_0<2\end{matrix}$ فإنها ستمسح في القرص قطعة مستقيمة موازية لـ ox.

إن الجزء الحقيقي لصورة ستبقى محمولة على $u = 3$ إذا x مسحت المجال $]-x_0\,, x_0[$ فإن v ستمسح المجال $[0\,,x_0^2[$

إن الـ x_0 تابعة لـ y_0 فكلما أخذنا قيمة لِ y_0 تكون قيمة x_0 هي $\sqrt{4-y_0^2}$ وبالتالي إذا جعلنا y_0 تمسح المجال $]-2\,,2[$ فالقطعة المستقيمة التي من الشكل $-2 < y_0 < 2\ ;\ y = y_0$ وَ $-2 < x_0 < 2\ ;\ -x_0 < x < x_0$ ستمسح القرص كله بشكل أفقي وبالتالي صورة القرص لن تتعدى القطعة المستقيمة التي طرفاها $]CD[$ ومنه صورة أي قطعة مستقيمة سوف تكون جزء من القطعة المستقيمة $]CD[$.

وهنا نلاحظ أن التابع f يصور لنا كامل القرص $D(0,2)$ إلى القطعة المستقيمة $[3\ 4[\,=\,]CD[$.

❀ **الرسم لتوضيح:**



❀..انتهت المحاضرة..❀

المحاضرة الحادية والعشرون:

2015/12/22

- **نهاية تابع عقدي:**

نقول أن لتابع ما عقدي نهاية عند نقطة حدية من المنطلق إذا تحقق:

$$\lim_{z\to a} f(z) = l \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ , \exists\, \delta(\varepsilon\,, a) : |z-a| < \delta \Rightarrow |f(z)-l| < \varepsilon \quad \forall\, z \in \underbrace{A}_{\text{منطلق}} \subseteq \mathbb{C}$$

وتعريف نهاية تابع بين فضائين متريين هو:

$$d(z\,,a) < \delta\ ; d(f(z), l) < \varepsilon$$

وتعريف نهاية تابع بين فضائين منظمين هو:

$$\|z-a\| < \delta\,;\ \|f(z)-l\| < \varepsilon$$

هنا تصبح المسافة في التعريف الأول بين نقطتين هي نظيم الفرق بينهما.

- **مبرهنة تربط بين نهاية تابع ونهاية متتالية:**

مبرهنة: ليكن التابع f معرف كالآتي: $f: A \to \mathbb{C}$

$$\forall\, \{z_n\} \subseteq A \text{ وَ } \{z_n\} \neq \{a\}\,, z_n \to a\,; f(z_n) \to l \Leftrightarrow \lim_{z\to a} f(z) = l$$

" أياً كانت المتتالية $\{z_n\}$ محتواة في المنطلق ولا تساوي المتتالية العقدية الثابتة $\{a\}$ عندئذ $z_n \to a$ فإن $f(z_n) \to l$"

✓ الإثبات غير مطلوب.

❀ استخدامات هذه المبرهنة: الحالة الأولى: عندما نريد إثبات أن ليس لتابع نهاية عند نقطة a فإننا نأخذ نهاية متتاليتين مختلفتين تسعيان كل منهما إلى a مثلاً $w_n \to a$ وَ $z_n \to a$ ومن ثم نبين أن نهاية $f(z_n)$ وَ نهاية $f(w_n)$ تسعيان إلى قيمتين مختلفتين.

الحالة الثانية: إذا علمنا أن للتابع f نهاية عند a ونريد إيجاد هذه النهاية.

مثال: أثبت أنه ليس للتابع $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ نهاية عند الصفر.

الحل: إن البسط معرف على $\mathbb{C}$ والمقام معرف على $\mathbb{C}^*$ ومنه الكسر أي تابع f معرف على $\mathbb{C}^*$.

من الواضح أن الصفر هي نقطة حدية وذلك لإنها تحقق تعريف نقطة الحدية.

نأخذ متتاليتين تسعيان إلى الصفر

$$z_n = \frac{1}{n} \to 0$$

$$\Rightarrow f(z_n) = \frac{\overline{z_n}}{z_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \to 1$$

❁ z_n هو عدد حقيقي وبالتالي مرافقه هو نفسه.

$$w_n = \frac{i}{n} \to 0$$

$$\Rightarrow f(w_n) = \frac{\overline{w_n}}{w_n} = -\frac{\frac{i}{n}}{\frac{i}{n}} = -1 \to -1$$

ومنه $1 = f(z_n) \neq f(w_n) = -1$

ومنه وجدت متتاليتين تسعيان إلى الصفر لكن متتالية الصور لكل منهما تسعيان إلى نهايتين مختلفتين وبالتالي ليس لتابع $f(z)$ نهاية عند الصفر.

☺ معلومة مهمة: عندما نقول أن البسط معرف على كذا والمقام معرف على كذا ماعدا القيم التي تعدمه فهذا كلام خاطئ لإن المقام عندما ينعدم هو معرف، بل نقول أن الكسر معرف على قيم البسط ما عدا القيم التي تعدم المقام.

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = l \iff \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = l$$

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty \iff \lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0 \iff \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$$

مثال: أثبت أن لتابع كثير الحدود العقدي من الدرجة n التالي:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_1 z + a_0$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_n$ ثوابت عقدية وَ $a_n \neq 0$ نهاية عند أي عدد عقدي a ونهايته تساوي قيمة هذا التابع عند a أي: $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$.

الحل: مجموعة تعريف $f(z)$ هو $\mathbb{C}$ كاملها.

طريقة الإثبات: نأخذ متتالية $w_m \to a$ تسعى إلى a ثم نأخذ:

$$f(w_m) = a_n w_m^n + a_{n-1} w_m^{n-1} + a_1 w_m + a_0$$

آخذ نهاية الطرفين:

إن نهاية الطرف الأيمن هي نهاية مجموع منتهي وكما نعلم إذا كان لدينا متتاليتين متقاربتين فإن نهاية مجموع تساوي مجموع النهايات.

وكل حد من حدود هذه المتتالية أي من حدود المجموع هو عبارة عن ثابت بمتتالية.

إن نهاية ثابت بمتتالية هي الثابت بنهاية المتتالية حيث لدينا المتتالية هي w_m^k حيث $0 \leq k \leq n$.

إن الجداء (الثابت بنهاية المتتالية w_m^k) هو جداء منتهي، ونعلم أن نهاية جداء منتهي يساوي جداء النهايات وبالتالي تصبح $\lim w_m^k = (\lim w_m)^k$ لكن فرضاً $w_m \to a$ فأصبح لدينا:

$$a_n \cdot a^n + a_{n-1} \cdot a^{n-1} + a_1 \cdot a + a_0$$

وهي قيمة كثير الحدود عند النقطة a.

❁ نستنتج: أن نهاية أي كثير حدود وعندما $z \to a$ تكون قيمة كثير الحدود عند a.

إن أي كثير حدود عقدي هو معرف ومستمر على كامل $\mathbb{C}$.

- **خواص النهايات:**

1- نهاية مجموع تابعين تساوي مجموع نهايتين أي نهاية التابع الأول + نهاية التابع الثاني شريطة أن تكون نهايتين موجودتين.

2- نهاية جداء تابعين تساوي جداء نهايتي التابعين شريطة أن تكون النهايتين موجودتين.

3- نهاية حاصل قسمة تابعين تساوي حاصل قسمة نهايتي التابعين شريطة أن تكون النهايتين موجودتين.

❁ ملاحظة:

عندما نقول تابع كسري نقصد به أن كل من البسط والمقام كثير حدود بينما لو كان كل من البسط والمقام ليس بكثير حدود فإننا ندعوه بحاصل قسمة تابعيين.

وإن مجموعة تعريف تابع الكسري هي $\mathbb{C}$ ما عدا القيم التي تعدم المقام، لإن كل من البسط والمقام كثير حدود معرف على $\mathbb{C}$ بينما مجموعة تعريف حاصل قسمة تابعين هي مجموعة تعريف البسط تقاطع مجموعة تعريف المقام ما عدا القيم التي تعدم المقام.

مثال: أوجد مجموعة تعريف التابع $f(z) = \frac{z-1}{z^2+9}$ واستنتج نهايته ومن ثم استنتج أن أي تابع كسري مستمر على $\mathbb{C}$ فرق القيم التي تعدم المقام.

أن $f(z)$ هو تابع كسري لأن البسط كثير حدود والمقام أيضاً كثير حدود وبالتالي مجموعة تعريف هي $\mathbb{C}$ عدا القيم التي تعدم المقام أي $\mathbb{C}\backslash\{3 \cdot i\ , -3 \cdot i\}$.

نعلم أن لأي تابع كسري نهاية عند أي عدد عقدي ("مجموعة تعريف" $a \in \mathbb{C}\backslash\{3i\ , -3i\}$)، ونهايته ستساوي قيمة البسط عند a على قيمة المقام عند a أو قيمة التابع f عند a.

لإننا نعلم أن نهاية أي كثير حدود عند نقطة ما، هي قيمة كثير الحدود عند تلك النقطة.

ولكون البسط والمقام كثيرات حدود بالتالي نهاية البسط عند a هي قيمة البسط عند a ونهاية المقام عند a هي قيمة المقام عند a، مع الانتباه أن ("مجموعة تعريف" $a \in \mathbb{C}\backslash\{3i\ , -3i\}$) وعليه تكون نهاية المقام غير معدومة وبالتالي النهايتين موجودتين.

✓ استنتاج الاستمرار ...وظيفة.

- **استمرار التابع العقدي:**

نقول عن تابع عقدي f إنه مستمر عند العدد العقدي a إذاا تحقق:

1- f معرف عند a (a من مجموعة التعريف).

2− نهاية f عندما $z \to a$ موجودة.

3− نهاية $f(z)$ عندما $z \to a$ تساوي $f(a)$.

مثال 1: $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ إن التابع غير مستمر عند الصفر وذلك لأنه غير معرف عند الصفر _اختل الشرط الأول_

مثال2: $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{z} & : z \neq 0 \\ 1 & : z = 0 \end{cases}$

إن f معرف عند الصفر لكنه غير مستمر عند الصفر لإن:

$\lim\limits_{z \to 0} f(z) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ النهاية غير موجودة تم إثباتها في بداية المحاضرة. _اختل الشرط الثاني_

❁ سؤال: هل يمكننا جعل هذا التابع مستمر بتغير قيمته عند الصفر (أي نستبد بد القيمة الثابتة 1 قيمة أخرى)؟

الجواب: طبعاً لا لإن في كل الأحوال النهاية غير موجودة عندما $z \to 0$.

مثال3: $f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & : z \neq 0 \\ 1 & : z = 0 \end{cases}$

إن التابع معرف عند الصفر وقيمته 1 ولدينا $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 = f(0)$

وبالتالي f مستمر عند الصفر.

❁ لكن لو فرضنا مثلاً نريد تبديل بدل الـ 1 مقدار أخر وليكن i أو أي عدد مختلف عن 1 سيكون التابع غير مستمر وذلك بسبب عدم تحقق الشر الثالث ((أي النهاية ستكون موجودة عند 0 لكن لا تساوي قيمة التابع عند 0)).

- **خواص الاستمرار:**

1− مجموع تابعين مستمرين هو تابع مستمر.

2− مجموع تابعيين مستمرين عند نقطة أو على مجموعة هو تابع مستمر عند تلك النقطة أو عند تلك المجموعة.

3− جداء تابعيين مستمرين عند نقطة أو على مجموعة هو تابع مستمر عند تلك النقطة أو عند تلك المجموعة.

4− حاصل قسمة تابعيين مستمرين عند نقطة أو على مجموعة هو تابع مستمر عند تلك النقطة أو عند تلك المجموعة فرق القيم التي تعدم المقام.

مبرهنة: إذا كان f مستمراً عند a و g مستمراً عند $f(a)$ فإن $g \circ f$ سيكون مستمراً عند a.

مثال: ليكن لدينا التابع $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ ماهي مجموعة استمرارية هذا التابع؟

إن التابع غير مستمر عند الصفر لأنه غير معرف عند الصفر.

سندرس الاستمرار عند $z_0 \neq 0$ إن $\frac{1}{z}$ مستمر عندها لإنه لا يعدم المقام ولدينا sin مستمر على $\mathbb{C}$ وبالتالي سيكون مستمر عند $\frac{1}{z_0}$.

إن $g(z) = \sin z$

$$(g \circ f)(z) = g\big(f(z)\big) = g\left(\frac{1}{z}\right) = \sin\frac{1}{z}$$

f مستمرة عند z_0 إن g مستمر عند $f(z_0)$ التي هي $\frac{1}{z_0}$ لإن الـ sin مستمر عند كل $\mathbb{C}$ فالتركيب الذي هو $\sin\frac{1}{z}$ مستمر عند z_0 فأصبح $\sin\frac{1}{z}$ مستمر على $\mathbb{C}^*$.

مبرهنة: يكون لِ $f(z) = u(x\,,y) + i \cdot v(x\,,y)$ نهاية عند $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ <u>إذاا</u> كانت النهايتين:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0\,,y_0)} u(x,y) \quad \text{وَ} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0\,,y_0)} v(x\,,y)$$

موجودتين وفي حال وجودهما فإن:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0\,,y_0)} u(x\,,y) + i \cdot \lim_{(x,y)\to(x_0\,,y_0)} v(x,y)$$

مبرهنة: يكون $f(z) = u(x\,,y) + i \cdot v(x\,,y)$ تابعاً مستمراً عند $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ <u>إذاا</u> كانت النهايتين: $v(x\,,y)$ وَ $u(x,y)$ مستمران عند $(x_0\,,y_0)$.

نستفيد من المبرهنة السابقة كالآتي:

مثال: ليكن لدينا التابع $f(z) = z^3$

1. أوجد مجموعة تعريف.
2. أوجد كل من جزئيه الحقيقي والتخيلي.
3. استفد من الطلب السابق لبيان أن f مستمراً على مجموعة تعريف.

الحل: إن $f(z)$ كثير حدود وبالتالي معرف على $\mathbb{C}$.

لإيجاد كل من جزئين التخيلي والحقيقي نبدل كل z بِ $x + iy$:

$$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^3 = \underbrace{(x^3 - 3xy^2)}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{(3x^2y - y^3)}_{v(x,y)}$$

خاصة: أي كثير حدود بمتحولين يكون معرف ومستمر وقابل للاشتقاق على $\mathbb{R}^2$.

ولكون v وَ u كثيري حدود فكل منهما مستمران على $\mathbb{R}^2$ وحسب مبرهنة السابقة يكون $f(z)$ مستمراً على $\mathbb{R}^2$ الذي يقابل $\mathbb{C}$ إذاً f مستمر على $\mathbb{C}$.

- **قابلية اشتقاق تابع عقدي:**

ليكن f تابعاً عقدياً معرفاً على $A \subseteq \mathbb{C}$ ولتكن $z_0 \in \underbrace{\overset{\circ}{A}}_{A \text{ داخل}}$ نقول إن f قابل للاشتقاق عند z_0 <u>إذاا</u> كانت:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{أو} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

موجودة ومحدودة من أي عدد عقدي وليس الـ ∞.

ونرمز لهذه النهاية في حالة وجودها بـ $\frac{df}{dz}(z_0)$ أو $f'(z_0)$ حيث أن الـ h هنا هي متحول عقدي.

❁ نقول عن تابع عقدي f إنه قابل للاشتقاق على مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ إذا كان قابل للاشتقاق عند كل نقطة من هذه المجموعة.

❁ إذا كان f قابل للاشتقاق على مجموعة مفتوحة A فنستطيع تعريف تابع جديد f' على A بالمساواة التالية:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \qquad z \in A$$

❁ ندعو هذا التابع بالتابع المشتق للتابع f وبنفس الأسلوب نستطيع أن نعرف المشتق من المراتب العليا لتابع عقدي.

...انتهت المحاضرة...

المحاضرة الثانية والعشرون:

2015/12/28

درسنا في المحاضرة السابقة قابلية اشتقاق تابع عقدي وقلنا:

f قابل للاشتقاق عند z_0 حيث z_0 تنتمي إلى داخل منطلق $f \Leftrightarrow$ النهاية $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ موجودة ومحدودة.

واذا وجدت تلك النهاية فإننا نرمز لها بِ $f'(z)$ أو $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

- إذا كان $f: A \to \mathbb{C}$ قابل للاشتقاق على مجموعة مفتوحة $A \subseteq \mathbb{C} \Leftarrow$ $f': A \to \mathbb{C}$ حيث أننا نقرن كل z بِ $f'(z)$ أي أننا نقرن كل z بقيمة النهاية كالتالي: $z \to f'(z) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$.
ونبدعوه بالمشتق الأول للتابع f.

❁ الخلاصة: إذا كان التابع قابل للاشتقاق على مجموعة مفتوحة فيوجد له مشتق أول على هذه المجموعة المفتوحة.

وأيضاً لو كان f' قابل للاشتقاق على مجموعة مفتوحة A فنستطيع تعريف مشتق له نسميه المشتق الثاني ونرمز له بِ f''

وهكذا نستطيع أن نعرف مشتق من أي مرتبة.

✓ قد يكون التابع غير قابل للاشتقاق على كامل منطلقه ولكن قابل للاشتقاق على مجموعة جزئية منه.

تعقيباً على ذلك يمكن أن يأتي سؤال امتحاني كالآتي:

- عين مجموعة تعريف التابع.
- عين مجموعة استمرارية التابع.

- عين مجموعة تعريف قابلية اشتقاق التابع.

- **خواص قابلية الاشتقاق:**

1- إذا كان لدينا تابعين قابلين للاشتقاق فإن تابع المجموع لهما يكون قابلاً للاشتقاق ومشتقه يساوي مجموع مشتقين.

" تعمم إلى مجموع منتهي وغير صحيحة من أجل مجموع غير منتهي"

2- إذا لدينا تابعين قابلين للاشتقاق على مجموعة مفتوحة فإن مجموعهما قابل للاشتقاق على المجموعة نفسها.

3- إذا كان تابع قابل للاشتقاق على مجموعة مفتوحة P وتابع أخر قابل للاشتقاق على مجموعة مفتوحة أخرى ولتكن Q وعليه فإن المجموع يكون قابل للاشتقاق على تقاطع المجموعتين أي $P \cap Q$.

4- جداء تابعين قابلي للاشتقاق فهو قابل للاشتقاق ومشتقه: مشتق الأول في الثاني + الأول بمشتق الثاني.

5- إذا كان لدينا قابلين للاشتقاق فإن حاصل قسمتهما سيكون قابل للاشتقاق على تقاطع مجموعة قابلية اشتقاق البسط مع مجموعة قابلية اشتقاق المقام فرق القيم التي تعدم المقام ومشتقه: مشتق البسط بالمقام – البسط بمشتق المقام على مربع المقام.

- **تمرين:** عيّن مجموعة قابلية اشتقاق التابع:

$$f(z) = \frac{z-i}{(z^2+z+1)(z^5+32)^3}$$

قبل البدء بالحل، نعلم أن أي كثير حدود عقدي هو تابع قابل للاشتقاق على كامل $\mathbb{C}$.

ولدينا أيضاً:

$$\frac{d}{dz}(z^n) = n \cdot z^{n-1} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ وَ } n \in \mathbb{N}$$

ويمكن إثبات ذلك بالاستفادة من نشر ثنائي الحد كالآتي:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h}\right) \dots (*)$$

بالاستفادة من نشر ثنائي الحد يكون:

$$(z+h)^n = z^n + nz^{n-1}\cdot h + \frac{n(n-1)}{2!} z^{n-2}\cdot h^2 + \cdots + h^n$$

نعوض في (*) فنحصل:

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\overbrace{z^n}^{*} + nz^{n-1}\cdot h + \frac{n(n-1)}{2!} z^{n-2}\cdot h^2 + \cdots + h^n \underbrace{-z^n}_{**}}{h}\right)$$

وبأخراج h عامل مشترك من الحدود:

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{h\left(nz^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}\cdot h+\cdots+h^{n-1}\right)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{nz^{n-1}+h\cdot\left(\frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}+\cdots+h^{n-2}\right)}{1}\right)$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} n\cdot z^{n-1}}_{=n\cdot z^{n-1}} + \underbrace{\lim_{h\to 0} h\cdot\left(\frac{n(n-1)}{2!}z^{n-2}+\cdots+h^{n-2}\right)}_{=0}$$

$$= n\cdot z^{n-1}$$

النهاية موجودة ومحدودة لإن أي عدد عقدي $z \in \mathbb{C}$ مرفوع لأي أس ومضروب لأي عدد يبقى عدد عقدي محدود.

والآن نأتي لحل التمرين: بما أن البسط والمقام كثيري حدود فهما قابلان للاشتقاق على $\mathbb{C}$ بكاملها ومنه فإن f قابل للاشتقاق على $\mathbb{C}$ فرق القيم التي تعدم المقام.

تعين فرق القيم التي تعدم المقام:

$$(z^2+z+1)(z^5+32)^3 = 0$$

إما: $(z^2+z+1) = 0$

وعليه فإن: $\Delta = 1-4 = -3 \Longrightarrow \underbrace{\delta}_{\text{جذر لـِ }\Delta} = \sqrt{3}i$

وبالتالي لدينا جذرين:

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{\left(-1+\sqrt{3}\cdot i\right)}{2} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$$

$$z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{\left(-1-\sqrt{3}\cdot i\right)}{2} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$$

أو: $(z^5+32)^3 = 0 \Longrightarrow z^5+32 = 0$

$$z^5 = -32$$

هذا يعني إيجاد الجذور من المرتبة الخامسة للعد (-32)

ليكن $z = r\cdot cis\,\theta$ جذراً من المرتبة الخامسة لـِ (-32) عندئذ:

$$r^5\, cis\,(5\theta) = \underbrace{32}_{\text{طويلة }-32}\ cis(\underbrace{\pi}_{\text{عدد سالب زاويته }\pi})$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} r^5 = 32 \Longrightarrow r = 2 \\ 5\theta = \pi+2\pi k \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}k\ : k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

والجذور هي $w_k = 2\,cis\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}k\right), \underbrace{k = 0,1,2,3,4}_{\text{خمس جذور}}$

وعليه فإن مجموعة قابلية الاشتقاق للتابع f هي: $\mathbb{C}\setminus\{z_1, z_2, w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\}$

إذا أردنا اشتقاق التابع فنعود للخاصة الخامسة من خواص قابلية الاشتقاق والتي تنص أن:

مشتق حاص قسمة تابعين عقدين= مشتق البسط بالمقام – مشتق المقام بالبسط على مربع المقام.

مبرهنة: f قابل للاشتقاق عند $z_0 \Longleftarrow$ f مستمر عند z_0.

الإثبات: $\lim\limits_{\substack{z \neq z_0 \\ z \longrightarrow z_0}} \left(f(z) - f(z_0)\right) = \lim\limits_{\substack{z \neq z_0 \\ z \longrightarrow z_0}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \cdot (z - z_0)$

نعلم أن نهاية جداء تابعين يساوي جداء نهايتي التابعين إذا كان نهايتين موجودتين ومحدودتين.

إن النهاية $\lim\limits_{\substack{z \neq z_0 \\ z \longrightarrow z_0}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ موجودة ومحدودة لكون f قابل للاشتقاق عند z_0 فرضاً.

والنهاية $\lim\limits_{\substack{z \neq z_0 \\ z \longrightarrow z_0}} (z - z_0) = 0$ فهي موجودة ومحدودة.

ومنه:

$$\lim_{\substack{z \neq z_0 \\ z \longrightarrow z_0}} \left(f(z) - f(z_0)\right) = \lim_{\substack{z \neq z_0 \\ z \longrightarrow z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{\substack{z \neq z_0 \\ z \longrightarrow z_0}} (z - z_0) = 0$$

ومنه f مستمر عند z_0.

❀ **ملاحظات:** عكس المبرهنة غير صحيح أي من الممكن أن يكون التابع مستمر عند نقطة ما وغير قابل للاشتقاق عند تلك النقطة.

لكن النفي صحيح دوماً أي: كل تابع غير مستمر عند z_0 هو تابع غير قابل للاشتقاق عند z_0.

مثال عن تابع مستمر وغير قابل للاشتقاق:

إن $f(z) = \bar{z}$ مستمر على $\mathbb{C}$ وغير قابل للاشتقاق عند أي نقطة وبشكل خاص عند الصفر.

الحل: لدينا حسب مبرهنة سابقة:

يكون التابع $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ مستمر عند $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ إذا كانت $u(x, y)$ وَ $v(x\,, y)$ مستمران عند (x_0, y_0) نوجد الجزء الحقيقي والتخيلي:

$$f(z) = \bar{z} = \overline{(x + \imath \cdot y)} = x - i \cdot y$$
$$\Longrightarrow u = x \ \ , v = -y$$

إن v وَ u مستمران على $\mathbb{R}^2$ لإنهما كثيرا حدود بمتحولين ومنه f مستمر على $\mathbb{C}$ (الذي يقابل $\mathbb{R}^2$).

لنثبت أنه غير قابل للاشتقاق:

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$$

إن البسط معرف على $\mathbb{C}$ والمقام معرف على $\mathbb{C}^*$ ومنه التابع f معرف على $\mathbb{C}^*$.

من الواضح أن الصفر هي نقطة حدية وذلك لإنها تحقق تعريف نقطة الحدية.

نأخذ متتاليتين تسعيان إلى الصفر

$$z_n = \frac{1}{n} \to 0$$

$$\Longrightarrow f(z_n) = \frac{\overline{z_n}}{z_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \to 1$$

❀ z_n هو عدد حقيقي وبالتالي مرافقه هو نفسه.

$$w_n = \frac{i}{n} \to 0$$

$$\Longrightarrow f(w_n) = \frac{\overline{w_n}}{w_n} = \frac{-\frac{i}{n}}{\frac{i}{n}} = -1 \to -1$$

ومنه $1 = f(z_n) \neq f(w_n) = -1$

ومنه وجدت متتاليتين تسعيان إلى الصفر لكن متتالية الصور لكل منهما تسعيان إلى نهايتين مختلفتين وبالتالي ليس لتابع $\frac{\bar{z}}{z}$ نهاية عند الصفر أي أن نهاية غير موجودة وبالتالي غير قابل للاشتقاق عند الصفر.

...وظيفة إثبات إنه غير قابل للاشتقاق عند أي نقطة من $\mathbb{C}$...

تمرين: أيضاً عن تابع مستمر وغير قابل للاشتقاق:

أثبت أن $f(z) = |z|^2$ تابع مستمر على $\mathbb{C}$ ولكنه غير قابل للاشتقاق إلا عند الصفر.

أي: (إن التابع سيكون غير قابل للاشتقاق عند أي عدد عقدي غير معدوم وسيكون قابل للاشتقاق فقط عند الصفر).

✓ الحل وظيفة على الطالب...

❀ ملاحظات: إذا قلنا أن هذا التابع غير قابل للاشتاق عند $\mathbb{C}^*$: فيكفي أن نثبت أنه غير قابل للاشتقاق عند نقطة من c^*

وإذا قلنا أن هذا التابع غير قابل للاشتقاق عند أي عدد غير معدوم: فيجب أن نثبت أنه غير قابل للاشتقاق عند كل عدد عقدي غير معدوم لكن ليس من الضروري البحث في قابلية اشتقاقه عند الصفر.

أما في التمرين السابق فهو يشمل الحالتين.

مبرهنة: ليكن $f = u + i \cdot v$ تابعاً عقدياً ولتكن $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ نقطة من داخل منطلق f، عندئذ:

f قابل للاشتقاق عند z_0 يكافئ:

1- v وَ u قابلان للاشتقاق التام (الكلي) عند (x_0 , y_0).

2- v وَ u يحققان المساواتين التاليتين:

$$\overbrace{u_x(x_0, y_0)}^{\frac{\partial u}{\partial x}} = \overbrace{v_y(x_0 , y_0)}^{\frac{\partial v}{\partial y}}$$
$$\underbrace{u_y(x_0 , y_0)}_{\frac{\partial u}{\partial y}} = \underbrace{-v_x(x_0 , y_0)}_{\frac{\partial v}{\partial x}}$$

تسمى المساوتان السابقتان بمعادلتي (بشرطي) كوشي-ريمان.

وإذا كان f قابلاً للاشتقاق عند $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ فإن:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i \cdot v_x(x_0 , y_0)$$

❀بسبب تحقق شرطي كوشي فإنه سيظهر لدينا ثلاث مساواة أضافة إلى المساواة السابقة لكن لسهولة نحفظ الصيغة الأولى.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= v_y(x_0, y_0) + i \cdot v_x(x_0 , y_0) \\ &= u_x(x_0, y_0) - i \cdot u_y(x_0 , y_0) \end{aligned}$$

$$= v_y(x_0, y_0) - i \cdot u_y(x_0 , y_0)$$

- إذا كان لدينا تابع قابل للاشتقاق التام عند نقطة (x_0, y_0) فإنه سيكون قابلاً للاشتقاق الجزئي عند (x_0, y_0) بالنسبة لكل من المتحولين أما العكس غير صحيح.

يصبح العكس صحيحاً إذا كان المشتقان الجزئيان للتابع من المرتبة الأولى موجودين بجوار لِـ (x_0 , y_0) ومستمرين عند النقطة النقطة (x_0 , y_0) عندئذ التابع قابل للاشتقاق الكلي.

❀ الخلاصة: إذا أردنا إثبات أن تابع ما وليكن u قابلاً للاشتقاق التام عند نقطة (x_0 , y_0) فيكفي أن نثبت أن للتابع مشتقات جزئية من المرتبة الأولى عند النقطة (x_0 , y_0)، أو للدقة (يكفي أن نثبت أن المشتقين الجزئيين بالنسبة لِـ y وَ x مستمرين عند (x_0 , y_0)).

- **تعميم المبرهنة السابقة:**

ليكن $f = u + i \cdot v$ تابعاً عقدياً معرفاً على المجموعة المفتوحة A.

f قابل للاشتقاق على $A \Leftrightarrow$ 1) v وَ u قابلان للاشتقاق التام (الكلي) على $\mathbb{R}^2 \supseteq A$.

2) v وَ u يحققان المساواتيين التالتيين:

$$u_x = v_y$$
$$u_y = -v_x$$

على A. أي: $(\forall\, x , y \in A)$

❀ اختلال شرط واحد من الشروط كفيل بجعل تابع غير قابل للاشتقاق.

تمرين: أثبت أن $f(z) = \bar{z}$ غير قابل للاشتقاق عندي أي نقطة من $\mathbb{C}$.

الحل:

$$f(z) = \bar{z} = \overline{(x + \imath \cdot y)} = x - i \cdot y$$
$$u = x \quad , \qquad v = -y$$

بالذهاب لشرط الثاني من المبرهنة:

$$u_x = 1 \neq -1 = v_y$$

علاقة المساواة غير محققة عند أي ثنائية $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ومنه f غير قابل للاشتقاق عند أي نقطة من $\mathbb{C}$.

♣ **تعريف التوابع العقدية:**

- نقول عن تابع عقدي f إنه تابع تحليلي على مجموعة مفتوحة A إذاا كان f قابل للاشتقاق على A.
- نقول عن تابع عقدي إنه تحليلي عند نقطة إذاا كان تحليلياً في جوار لها ((إي إذا كان قابلاً للاشتقاق في جوار تلك النقطة)).
- نقول عن تابع إنه تحليلي على مجموعة إذاا كان تحليلياً عند كل نقطة من هذه المجموعة.

مثال(1): $f(z) = \bar{z}$ غير تحليلي على $\mathbb{C}$ لإنه غير قابل للاشتقاق على $\mathbb{C}$.

وغير تحليلي عند أي نقطة من $\mathbb{C}$ لإنه غير قابل للاشتقاق عندي أي نقطة من $\mathbb{C}$.

مثال(2): $f(z) = |z|^2$ هو غير تحليلي عند أي نقطة من $\mathbb{C}$ _على رغم من أن تابع قابل للاشتقاق عند الصفر_ وذلك لإن تابع غير قابل للاشتقاق عند أي جوار للصفر.

تحليلي عند نقطة $\Longrightarrow$ قابل للاشتقاق عند هذه النقطة $\Longrightarrow$ مستمر عند هذه النقطة $\Longrightarrow$ معرف عند هذه النقطة.

عكس الاقتضاءات السابقة غير صحيح في الحالة العامة.

...انتهت المحاضرة...

المحاضرة الثالثة و العشرون:

2015/12/29

- **مبرهنة:** إذا كان f قابلاً للاشتقاق عند z_0 و g قابلة للاشتقاق عند $f(z_0)$ فإن $g \circ f$ قابلاً للاشتقاق عند z_0 وإن:

$$(g \circ f)'(z_0) = g'\big(f(z_0)\big) \cdot f'(z_0)$$

تعمم المبرهنة السابقة كالآتي:

- إذا كان f قابلاً للاشتقاق على A و g قابلة للاشتقاق عند $f(A)$ فإن $g \circ f$ قابلاً للاشتقاق عند A وإن:

$$(g \circ f)'(z) = g'\big(f(z)\big) \cdot f'(z) \quad \forall\, z \in A$$

مثال: ما هي مجموعة قابلية اشتقاق التابع التالي ومن ثم احسب مشتقه:

$$\left(\sin\frac{1}{z}\right)'$$

الحل: إن التابع السابق عبارة عن تركيب تابعين حيث $f = \frac{1}{z}$ وَ $g = \sin z$

إن $f = \frac{1}{z}$ قابل للاشتقاق على $\mathbb{C}^*$ وَ $\sin z$ قابل للاشتقاق على $\mathbb{C}$ وبالتالي: $g \circ f$ قابل للاشتقاق على $\mathbb{C}^*$.

وإن: $\left(\sin\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2} \cdot \cos\frac{1}{z} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}^*$

نلاحظ أن $\sin\frac{1}{z}$ غير قابلة للاشتقاق عند الصفر لإن التابع غير معرف عند الصفر.

❖ خواص التوابع التحليلية:

1− مجموع تابعين تحليلين على مجموعة مفتوحة سيكون تابع تحليلي على تلك المجموعة.

2− جداء تابعين تحليلين على مجموعة مفتوحة سيكون تابع تحليلي على تلك المجموعة.

3− حاصل قسمة تابعين تحليلين على مجموعة مفتوحة سيكون تابع تحليلي على تلك المجموعة فرق القيم التي تعدم المقام.

• <u>إيجاد مجموعة تحليلية تابع:</u>

أي نريد إيجاد تلك المجموعة المفتوحة التي يكون التابع قابل للاشتقاق عليها، بنفس الطريقة التي نوجد فيها مجموعة قابلية اشتقاق تابع ولكن هنا يجب الانتباه لنقطة مهمة وهي إذا كان لدينا نقطة وتابع قابل للاشتقاق عند هذه النقطة ولكنها معزولة أي أن التابع غير قابل للاشتقاق في جوار تلك النقطة فإننا نعتبر أن التابع غير تحليلي عند تلك النقطة، وبالتالي يجب علينا حذف النقطة.

يبقى لدينا النقاط التي يكون التابع غير قابل للاشتقاق عندها وبالتالي قد لا يكون تحليلي عندها ويجب الانتباه أيضاً منها وهذا لن يحصل إلا بحالة التابع الكسري (كثير حدود على كثير حدود) النقاط التي يكون عندها التابع غير تحليلي عندها هي حلول المقام (القيم التي تعدم المقام) أو $\left(\text{المقام} = 0 \text{ , المقام هو كثير حدود من درجة ما}\right)$

وبالتالي سيكون لدينا معادلة جبرية من درجة ما فإن أي معادلة من درجة n في $\mathbb{C}$ لها n حل وقد يكون مضاعفاً.

باختصار: فإن عدد هذه النقاط سيكون منتهي (أي نقاط التي تعدم المقام سيكون عددها منتهي) وعليه فإن التابع الكسري سيكون قابل للاشتقاق على $\mathbb{C}$ فرق مجموعة منتهية من النقاط وهي مجموعة مفتوحة وذلك لإن المجموعة المنتهية مغلقة وبالتالي فالتابع تحليلي على تلك المجموعة ولا يمكن أن يكون تحليلياً عند أي نقطة من نقاط التي المقام لأنه غير قابل للاشتقاق عندها.

• **التابع التوافقي:** ليكن u تابع حقيقي معرف على مجموعة $\overbrace{\mathbb{R}^2 \supseteq A}^{\text{تابع بمتحولين}}$ نقول عن u إنه توافقي على A <u>إذاا</u>:

1) $u \in C_2$ على A أي المشتقات الجزئية حتى المرتبة الثانية لِ u موجودة ومستمرة على المجموعة المفتوحة A.

2) u يحقق معادلة لابلاس على A:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \ \forall \ (x\,,y) \in A$$

❁ مثال: إن $u = x^2 - y^2$ تابع توافقي على $\mathbb{R}^2$ لإن:

الحل: إن $u_x = 2x$ ، $u_{xx} = 2$ ، $u_y = -2y$ ، $u_{yy} = -2$ جميع هه المشتقات مستمر على $\mathbb{R}^2$ (لإنها كثيرات حدود بمتحولين).

وهكذا فإن الشرط الأول محقق.

$\Longleftarrow$ u من الصف C_2 على $\mathbb{R}^2$. لنرى هل تحقق معادلة لابلاس:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0 \quad \forall \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2$$

وبالتالي شرط الثاني محقق، و عليه فإن التابع u تحليلي.

- **مبرهنة:** $f = u + i \cdot v$ تحليلي على مجموعة مفتوحة A $\Longleftarrow$ u وَ v توافقيان على A.

۞ الإثبات غير مطلوب.

نستفيد من المبرهنة سابقة في حالة نفيها الذي ينص علي: إذا كان v وَ u غير توافقي على المجموعة المفتوحة A أو على الأقل v أو u غير توافقي على A فإن التابع لا يمكن أن يكون تحليلياً على A.

۞مثال: إذا كان لدينا تابع عقدي جزءه الحقيقي $x^2 + y^2$ فهل يمكن أن يكون تحليلياً على المجموعة المفتوحة؟؟

الحل: كلا، لإنه لن يحقق معادلة لابلاس (الشرط الثاني) وذلك لإن: $u_{yy} = 2$ وَ $u_{xx} = 2$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 + 2 = 4 \neq 0 \quad \forall \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2$$

وبالتالي غير توافقي على المجموعة المفتوحة $\mathbb{R}^2$.

۞ **ملاحظة:** العكس للمبرهنة السابقة غير صحيح: أي قد يكون الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للتابع كلاهما توافقي على مجموعة مفتوحة ما بينما التابع غير تحليلي على تلك المجموعة.

۞ مثال عن ذلك: أثبت أن f المعرف كالآتي: $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy \cdot i$

غير تحليلي على الرغم من أن جزئين الحقيقي والتخيلي توافقيان.

الحل: $u = x^2 - y^2$ توافقي على $\mathbb{R}^2$..درسناه قبل قليل.

$v = -2xy$ توافقي على $\mathbb{R}^2$ لإن الشرط الأول محقق أي مشتقات التابع حتى المرتبة الثانية موجودة ومستمرة على $\mathbb{R}^2$

والشرط الثاني (معادلة لابلاس) محققة حيث $v_{xx} = 0$ ، $v_{yy} = 0$

وليتم المطلوب يجب أن نثبت أن هذا التابع غير تحليلي على $\mathbb{C}$ بالرغم من كون جزءه الحقيقي والتخيلي تحليلياً كامل $\mathbb{R}^2$.

۞ نستخدم المبرهنة التالية لذلك: إذا كان f تحليلي على مجموعة مفتوحة $\Longleftarrow$ 1) v وَ u قابلان للاشتقاق التام،

2) يحققان شرطي كوشي_ريمان.

$$u_x = -v_y \Leftrightarrow -2x = 2x \Leftrightarrow x = 0$$

$\Longleftarrow$ التابع قابل للاشتقاق على الأكثر عند نقاط المحور oy وليس على كامل $\mathbb{R}^2$، أي أن f غير قابل للاشتقاق عند أي نقطة ليست من oy ومنه f غير تحليلي $\mathbb{C} \underset{\text{التي تقابل}}{\cong} \mathbb{R}^2$.

۞ لو كان السؤال هل يمكن لِ $f(z)$ أن يكون تحليلياً على المجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$؟؟

جوابه: المعادلة محققة فقط عند نقاط oy لكن إذا كان التابع قابل للاشتقاق عند هذه النقاط فإن oy عبارة عن مجموعة غير مفتوحة وبالتالي التابع لن يكون تحليلياً.

❁ صيغة ثانية للسؤال: هل يمكن لِ $f(z)$ أن يكون تحليلياً عند نقطة من $\mathbb{C}$؟؟

جوابه: إذا كان التابع قابل للاشتقاق عند نقطة ما من المستوي فهذه النقطة مبدئياً يجب أن تنتمي إلى oy وبالتالي لن يكون التابع قابلاً للاشتقاق على أي جوار لها (لإن أي جوار لنقطة من المحور oy سيحوي نقاط ليست من المحور) وعليه فإن معادلة كوشي_ريمان الأولى لن تكون محققة.

❁ هل يمكن لهذا التابع أن يكون قابلاً للاشتقاق عند نقطة ما من المستوي؟؟

الحل: سنأخذ معادلة كوشي الثانية:

$$u_y = -2y \quad , \quad v_x = -2y$$
$$u_y = -v_x \Leftrightarrow -2y = 2y \Leftrightarrow y = 0$$

معادلة كوشي_ريمان الثانية سيتحقق فقط عند نقاط المحور ox.

بالنتيجة معادلتا كوشي_ريمان الأولى والثانية ستتحققان فقط عند المبدأ $(0, 0)$.

هل v وَ u قابلان للاشتقاق التام عند النقطة $(0,0)$؟؟

الجواب: نعم أن كل من v وَ u كثيرا حدود فهما قابلان للاشتقاق التام على $\mathbb{R}^2$ وبالتالي سيكونا قابلان للاشتقاق عند $(0,0)$ الشروط جميعها محققة وبالتالي التابع f سيكون قابل للاشتقاق فقط عند المبدأ ومشتقه عند المبدأ هو:

$$f(0) = \underbrace{u_x(0,0)}_{2x=0} + i \cdot \underbrace{v_x(0,0)}_{-2y=0} = 0$$

ولكن f غير تحليلي على $\mathbb{C}$ ذلك لإن f غير قابل للاشتقاق في أي جوار لنقطة $(0,0)$.

-.-.-.-.--.-.-.-.--.-.-.-.--.-.-.-.--.-.-.-.-

❁ مثال: أثبت أن $f(z) = z^2$ تحليلي على $\mathbb{C}$ وأن: $f'(z) = 2z$ وأوجد مشتقه (باستخدام معادلتا كوشي_ريمان).

الحل:

$$f(z) = (x + i \cdot y)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy \quad \ldots\ldots (*)$$
$$u = x^2 - y^2 \quad , \quad v = 2xy$$

✓ هنا ليس هنالك داعي لمعرفة هل هما توافقيان ذلك لأن نص السؤال أثبت أن تابع تحليلي وعليه فإنهما توافقيان بينما لو كان نص السؤال أثبت لأن التابع غير تحليلي فيجب تبين أنهما توافقيان.

✓ من الضروري فهم صيغة السؤال الامتحاني والانتباه جيداً قد تختلف الحل باختلاف الصيغ.

إن v وَ u كلاهما قابلان للاشتقاق التام على $\mathbb{R}^2$ لإنهما كثيري حدود بمتحولين بقي علينا أن نتأكد هل يحققان معادلتي كوشي_ريمان؟

$$\left.\begin{aligned} u_x &= 2x = v_y \\ u_y &= -2y = -v_x \end{aligned}\right\} \quad \forall \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

ومنه f قابل للاشتقاق على $\mathbb{C}$ وَ $\mathbb{C}$ مفتوحة وعليه فإن f تحليلي على $\mathbb{C}$.

المشتق:

$$f'(z) = u_x + i \cdot v_x = 2x + i \cdot 2y = 2(x + i \cdot y) = 2z \quad \forall \ \ z \in \mathbb{C}$$

مبرهنة: إذا كان $f = u + i \cdot v$ تحليلياً على مجموعة مفتوحة فإن العبارة الصريحة لِ f بدلالة z تعطى بالمساواة:

$$f(z) = u(z, 0) + i \cdot v(z, 0)$$

۞ بدلنا كل x بِ z وكل y بِ الصفر.

بتطبيقها على التابع المذكور في العلاقة (*) ضمن التمرين السابق:

للحصول على العبارة الصريحة: أضع مكان كل $x \leftarrow z$ وَ أضع مكان كل $y \leftarrow 0$

$$f(z) = z^2 - 0 + i \cdot 2z(0) = z^2$$

وهي عبارة f بدلالة z.

۞ إذا كان لدينا التابع ليس تحليلي فليس من الضروري أن أحصل على عبارته الصريحة باستخدام التبديل السابق.

مثال على ذلك:

$$f(z) = \bar{z} = x - i \cdot y$$

تابع غير تحليلي (غير قابل للاشتقاق عند أي نقطة من $\mathbb{C}$)

بتبديل كل x بِ z : $f(z) = z - i \cdot 0 = z$ ولكن $f(z) = \bar{z}$ وعليه فإن $z = \bar{z}$

۞ لو طلب مني إيجاد العبارة الصريحة لتابع بدلالة z : 1- نتأكد أن التابع تحليلي.

2- إذا كان تحليلياً نبدل كل x بِ z وَ كل y بِ الصفر.

۞تساؤلات ومناقشة: إذا كان لدينا $f'(z) = u_x - i \cdot u_y$ والصيغة الثانية $f'(z) = v_y + i \cdot v_x$

و إذا كان f تابع قابل للاشتقاق على مجموعة ما فإن المشتق يعطى بواحدة من المساواتيين السابقتيين.

✓ إن معرفة جزء واحد فقط حقيقي كان أو تخيلي لتابع تحليلي (قابل للاشتقاق على مجموعة مفتوحة) كافي لمعرفة مشتقه على تلك المجموعة واالمساواتين السابقتان توضح ذلك.

وعليه فإذا أردنا المشتق لتابع تحليلي جزءه الحقيقي معلوم نأخذ الصيغة الأولى، وإذا أردنا المشتق لتابع تحليلي جزءه التخيلي معلوم فنأخذ الصيغة الثانية.

۞ السؤال؟! إذا أُعطينا تابع بمتحولين وسُئِلنا هل يمكن لهذا التابع أن يكون جزءاً حقيقياً (جزءاً تخيلياً) لتابع تحليلي؟؟

الجواب: أولاً نرى إذا كان هذا التابع توافقي أم لا فإذا كان غير توافقي فالجواب حتماً لا ذلك لإن وحسب مبرهنة الجزء الحقيقي والتخيلي لتابع تحليلي يجب أن يكونا توافقيان.

وأما إذا كان التابع توافقياً على مجموعة مفتوحة ما فإننا نبحث عن تابع u، أصبح لدينا u معلوم وهو توافقي على مجموعة مفتوحة.

لمعرفة التابع التحليلي الذي جزءه الحقيقي u إذا كان موجوداً فإنه يجب معرفة v، وإذا كان التابع تحليلي فيجب أن يرتبط v وَ u بمعادلتي كوشي_ريمان.

$$\begin{Bmatrix} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{Bmatrix}$$

فإننا نرى جملة المعادلتي التفاضليتين جزئيتين (سميناهم بهذا الاسم لإن v مجهول)، فإن كان لهما حل على تلك المجموعة المفتوحة أو جزئية منها مفتوحة فالجواب هو نعم وَ $f = u + i \cdot v$

وإن لم يكن لهذه الجملة حل فالجواب لا ولا يمكن لِ u أن يكون جزء حقيقي ولا جزء تخيلي لـ تابع تحليلي.

۞طريقة ثانية: بعد التأكد أن u تابع توافقي. إذا وجد تابع تحليلي f يقبل u جزء حقيقي له فإن مشتقه يعطى بهذه المساواة:

$$f'(z) = u_x - i \cdot u_y$$
$$= v_y + i \cdot v_x$$

هذا المشتق تحليلي ومعطى بدلالة الجزئين الحقيقي والتخيلي، إذا كان f تحليلي فإن f' تحليلي واستطيع أن أحصل على العبارة الصريحة لِ f' وذلك بتبديل كل x بِ z وكل y بِ الصفر في عبارة $f'(z)$ ومن ثم نأخذ التابع الأصلي لِ f' فنحصل على تابع موجود إن كان التابع الأصلي موجود.

✓ تابع عقدي تحليلي عُلِم جزءه الحقيقي فلابد ومن معرفة جزءه التخيلي.

• التوابع الممثلة بمتسلسلة قوى:

لنفرض أن لدينا متسلسلة قوى:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

نصف قطر تقاربها $r > 0$.

هذه المتسلسلة ستكون متقاربة بالإطلاق على قرص تقاربها ولنأخذ التابع التالي:

$$f: D(z_0\,, r) \to \mathbb{C}$$

المعرف بالشكل:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

هذا التابع معرف لإن: لو أخذنا z من قرص تقارب المتسلسلة فإن هذه المتسلسلة ستكون متقاربة وتقارب متسلسلة يعني وجود مجموعها.

- **مبرهنة مهمة:** إن التابع الممثل بمتسلسلة القوى $\sum a_n (z - z_0)^n$ قابل للاشتقاق على قرص تقارب هذه المتسلسلة بحيث $(r > 0)$ ومشتقه هو التابع الممثل بالمتسلسلة المشتقة لتلك المتسلسلة.

$$f: D(z_0\,, r) \to \mathbb{C}$$
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$
$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (z - z_0)^{n-1}$$
$$\forall \quad z \in D(z_0\,, r)$$

۞ مشتق التابع هو مجموع المشتقات.

✓ نتيجة: إن التابع الممثل بمتسلسلة القوى قابل للاشتقاق عدد غير منته من المرات وإن

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad \forall\, n$$

أي أمثال المتسلسلة هي نفس أمثال تايلور.

۞إثبات غير مطلوب۞

✓ نتيجة: إذا تطابقت متسلسلتا قوى متحدتان بالمركز عند نقاط مجموع غير منتهيان تتجمع عند المركز فإن المتسلسلتين متطابقتان. $(a_n = b_n)$

-.-.-.-.--.-.-.-.--.-.-.-.--.-.-.-.--.-.-.-.-

* التابع الأسي العقدي:

❁ وظيفة: أثبت أن متسلسلة القوى التالية متقاربة على $\mathbb{C}$ بكاملها أي $(r = \infty)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

- يعرف التابع الاسي العقدي على $\mathbb{C}$ بإنه التابع الممثل للمتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$ أي :

$$e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

إن هذا التابع تحليلي على $\mathbb{C}$ حسب المبرهنة الأخيرة " لإنه تابع ممثل بمتسلسلة قوى على $\mathbb{C}$ "

و مشتقه يعطى بالمساواة:

$$(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \cdot z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

❁ إذا كان z حقيقي أي $z = x \,:\, x \in \mathbb{R}$ فإن:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^x$$

أي أن مقصور e^z على $\mathbb{R}$ هو $e^z_{\setminus\mathbb{R}} = e^x$، بمعنى أن e^z هو ممدد تحليلي لِ e^x على الساحة العقدية.

❁ $$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \qquad \forall\; z_1 , z_2 \in \mathbb{C}$$

إثبات ذلك وظيفة.

❁ إيجاد الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لِ e^z:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \cdots$$

ولكون المتسلسلة متقاربة بالإطلاق فيحق لنا التبديل والتجميع:

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i \cdot \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \cos y + i \cdot \sin y$$

وبالتالي $\forall\, z \in \mathbb{C} \quad e^z = \cos z + i \cdot \sin z$ لم يعد مجرد رمز كما كنا نتحدث في الفصل الأول بل أصبح قيمة للتابع الاسي العقدي.

بالنتيجة:

$$e^z = e^x(\cos y + i \cdot \sin y)$$

$$= \underbrace{e^x \cdot cos\, y}_{\text{الجزء الحقيقي}} + i \cdot \underbrace{e^x \cdot sin\, y}_{\text{الجزء التخيلي}}$$

تمرين: أثبت أن e^z تابع تحليلي على $\mathbb{C}$ وعين مشتقه على $\mathbb{C}$ باستخدام معادلتي كوشي ريمان.

الحل وظيفة.

- **طويلة e^z:**

$$|e^z| = e^x > 0 \qquad : e^z \neq 0$$

- **زاوية e^z:**

$$\arg e^z = y \qquad : e^z = a \neq 0$$

...انتهت المحاضرة...

المحاضرة الرابعة والعشرون:

2015/12/30

حل التمارين المرفقة في نهاية المحاضرة العشررون:

1- أثبت أن $\left\{n \cdot \left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right\}$ متقاربة وعين نهايتها:

الحل:

نأخذ الطويلة أولاً:

$$\left|n \cdot \left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right| = |n| \cdot \frac{|1+i|^n}{2^n} = \frac{n}{2^n} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^n = \frac{n}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$$

ولكن عندما $n \to \infty$ فإن كل من البسط والمقام يسعى إلى الـ ∞ ولكن نعلم أن التابع الأسي يذهب إلى الـ ∞ بسرعة أكبر بكثير من أي كثير حدود وهذا يعني أن حاصل القسمة سيسعى إلى الصفر.

ومنه: $|z_n| \to 0$

وحسب خاصة لدينا: $|z_n| \to 0 \Leftrightarrow z_n \to 0$

ومنه $0 \to \left\{n \cdot \left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right\}$ و بالتالي المتتالية متقاربة والصفر هو نهاية المتتالية السابقة.

2- عين متتاليتي الأجزاء الحقيقة والأجزاء التخيلية لِ $\left\{n \cdot \left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right\}$:

الحل:

نكتب العدد العقدي $1 + i$ بالشكل المثلثي.

$$n \cdot \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = \frac{n}{2^n}\left(\sqrt{2} \cdot cis\frac{\pi}{4}\right)^n = \frac{n}{\left(\sqrt{2}\right)^n} \cdot cis\frac{n\pi}{4}$$

وعليه فإن:

$$= \underbrace{\frac{n}{\left(\sqrt{2}\right)^n} \cdot \cos\frac{n\pi}{4}}_{x_n} + i \cdot \underbrace{\frac{n}{\left(\sqrt{2}\right)^n} \cdot \sin\frac{n\pi}{4}}_{y_n}$$

نعلم حسب مبرهنة: تكون متتالية عقدية متقاربة من عدد عقدي ما إذا كان كل من جزئيها الحقيقي والتخيلي متقاربان كل منهما إلى جزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد العقدي وعلى الترتيب.

نلاحظ هنا أن الـ x_n متقاربة لإن $x_n = \underbrace{\frac{n}{(\sqrt{2})^n}}_{\text{لا متناهي في الصغر}} \cdot \underbrace{\cos\frac{n\pi}{4}}_{\text{محدودة}}$ وبالتالي فإن $x_n \to 0$

وإن الـ y_n متقاربة لإن $y_n = \underbrace{\frac{n}{(\sqrt{2})^n}}_{\text{لا متناهي في الصغر}} \cdot \underbrace{\sin\frac{n\pi}{4}}_{\text{محدودة}}$ وبالتالي فإن $y_n \to 0$

وبالتالي وحسب المبرهنة:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\sqrt{2})^n} \cdot \cos\frac{n\pi}{4} + i \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\sqrt{2})^n} \cdot \sin\frac{n\pi}{4}$$
$$= 0 + i \cdot 0 = 0$$

وهذا ما تم إثباته في التمرين الأول.

3- ادرس تقارب وتقارب بالإطلاق لـ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2} \quad \text{وَ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n} \quad \text{وَ} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

الحل:

1) أخذ متسلسلة الطويلات:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

متقاربة (لإنها ريمانية حيث $p = 2 > 1$)

إذاً المتسلسلة: $\sum \frac{i^n}{n^2}$ متقاربة بالإطلاق ومنه فهي متقاربة.

2) $\sum \frac{(1+i)^n}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(1+i)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{n}$$

هذه المتسلسلة متباعدة لإن حدها العام $\frac{(\sqrt{2})^n}{n}$ لا يسعى للصفر بل يسعى إلى الـ ∞.

وعليه فإن المتسلسلة ليست متقاربة بالإطلاق.

ممكن إثبات إنها متباعدة باستخدام اختبار الجذر النوني:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{(1+i)^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(1+i)^n}{n}\right|} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt{2} > 1$$

وعليه فإن المتسلسلة متباعدة.

3) $\sum \frac{i^n}{n}$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

وهي متسلسلة متباعدة.

وبالتالي لم نستفد، سوف ننشر حدود المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}=i-\frac{1}{2}-\frac{i}{3}+\frac{1}{4}+\frac{i}{5}-\frac{1}{6}-\frac{i}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

نلاحظ هنا لا يمكن تجميع الحدود لإن المتسلسلة غير متقاربة بالإطلاق.

سوف نكتب i بالشكل المثلثي وذلك للحصول على الجزء الحقيقي والتخيلي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(cis\frac{\pi}{2}\right)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cis\frac{n\pi}{2}}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}+i\cdot\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right)$$

متسلسلة الأجزاء الحقيقية هي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\right)$$

ومتسلسلة الأجزاء التخيلية هي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right)$$

لإثبات تقارب الأجزاء:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\right)=0-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$$

وهي متقاربة حسب شروط ليبتنز لإنها: 1) متناوبة وَ 2) $\left|\frac{(-1)^n}{2n}\right|=\frac{1}{2n}\to 0$ وَ 3) $\frac{1}{2n}$ متناقصة.

وبنفس الطريقة نثبت تقارب الجزء التخيلي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

وعليه وحسب مبرهنة : $\sum z_n$ متقاربة $\Leftrightarrow$ $\sum x_n$ وَ $\sum y_n$ متقاربتان.

ومنه $\sum \frac{i^n}{n}$ متقاربة.

4- أوجد نصف قطر تقارب وقرص التقارب كل من المتسلسلات القوى التالية:

$$\sum n^n \cdot z^n \quad \text{وَ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n} \quad \text{وَ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^n$$

$$1 + az + bz^2 + a^2z^3 + b^2z^4 + a^3z^5 + b^3z^6 + \cdots \quad ; |a| < |b|$$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{n}^{a_n} \cdot z^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} \to 1$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1$$

قرص التقارب هو $D(0,1)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$$

$$a_n = \frac{1}{n^n} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{n} \to 0$$

نصف قطر التقارب $r = \infty$ والمتسلسلة متقارب بالإطلاق على $\mathbb{C}$.

$$\sum n^n \cdot z^n$$

نصف قطر تقاربها الصفر فهي متقاربة فقط عند المركز.

$$\underbrace{1}_{1} + \underbrace{a}_{|a|^{\frac{1}{2}}} z + \underbrace{b}_{|b|^{\frac{1}{3}}} z^2 + \underbrace{a^2}_{|a|^{\frac{1}{4}}=|a|^{\frac{1}{2}}} z^3 + b^2z^4 + a^3z^5 + b^3z^6 + \cdots \quad ; |a| < |b|$$

هذه متسلسلة قوى مركزها المبدأ:

لنأخذ متتالية الجذر النوني لطويلة الأمثال: $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$

$$a_0 = 1 , a_1 = a , a_2 = b , a_3 = a^2 , \dots \dots ..$$

نأخذ متتالية جزئية من $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$

$$|a|^{\frac{1}{2}} , |a|^{\frac{1}{2}} , \dots \dots \to |a|^{\frac{1}{2}}$$

وعليه فإن $|a|^{\frac{1}{2}}$ نقطة تجمع.

نأخذ متتالية جزئية أخرى:

$$|b|^{\frac{1}{3}} , |b|^{\frac{2}{3}} , |b|^{\frac{3}{7}} , \dots , |b|^{\frac{n}{2n+1}} \to |b|^{\frac{1}{2}}$$

و بالتالي $|b|^{\frac{1}{2}}$ نقطة تجمع.

سنبين أن $|b|^{\frac{1}{2}}$ وَ $|a|^{\frac{1}{2}}$ هما نقطتا التجمع الوحيدتان.

۞ نعلم أن نقاط تجمع متتالية هي نهايات المتتاليات الجزئية المتقاربة منها.

لنأخذ متتالية جزئية كيفية من $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ ولنميز الحالات الثلاث التالية:

1− يوجد عدد N كبيرة كفاية بحيث تصبح كل حدود المتتالية التي تليه مساوية لطويلة $|a|^{\frac{1}{2}}$ وفي هذه الحالة ستكون نهاية المتتالية الجزئية مساوية لطويلة $a^{\frac{1}{2}}$.

2- يوجد عدد N كبيرة كفاية بحيث يصبح الحد العام للمتتالية التي تليه مساوية لِ $|b|^{\left(\frac{n}{2n+1}\right)}$ وفي هذه الحالة ستكون نهاية المتتالية الجزئية مساوية لطويلة $b^{\frac{1}{2}}$.

3- هي نفي (1) وَ (2) أي المتتالية الجزئية في هذه الحالة ستبقى لها حدود مساوية لِ $|a|^{\frac{1}{2}}$ وحدود أخرى مساوية لِ $|b|^{\frac{1}{2}}$ وذلك حتى الـ ∞ في هذه الحالة ستكون المتتالية متباعدة لإنها يمكن أخذ منها متتاليتين جزئيتين وكل منهما تسعيان لقيمة.

ومنه نقطتا التجمع الوحيدتين هما $|a|^{\frac{1}{2}}$ وَ $|b|^{\frac{1}{2}}$

ونعلم أن النهاية العليا هي أكبر نقطة تجمع وبالتالي $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = |b|^{\frac{1}{2}}$ ذلك لإن: $|a| < |b|$

وبالتالي $r = \frac{1}{|b|^{\frac{1}{2}}}$ وَ $D\left(0, \frac{1}{|b|^{\frac{1}{2}}}\right)$.

السؤال الخامس والسادس غير مطلوب.

كل عام وأنت بخير انتهى المقرر بسلام نتمنى لكم التوفيق والنجاح...

أما نمط الأسئلة: المادة من 100 علامة حد النجاح 60 علامة هناك 3 أسئلة رئيسية الأول بحدود الـ 30 علامة والثاني يترواح بين 30 إلى 35 أما السؤال الثالث يتراوح بين 30 إلى 40 علامة.

السؤال الأول: يندرج تحته سؤال نظري من مبرهنات مع البرهان بالإضافة إلى الأسئلة البسيطة من حل معادلة عقدية أو إيجاد الجذور النونية أو كتابة العدد العقدي بالشكل الجبري أو المثلثي.

طبعاً يجب الانتباه أنه يمكن دمج عدد من الأسئلة مع بعضها بسؤال واحد، والانتباه إيضاً إلى صيغة السؤال.

السؤال الثاني: كل ما يخص الطبولوجيا العقدية، أما السؤال الثالث: فهي عن التوابع العقدي وكل ما اندرج تحته.

وهنالك سؤال مهم وهو حل وظيفة في نهاية محاضرة سابعة وهي موجودة في المكتبة.

...انتهت المحاضرة...